



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

TRONCO DE CILINDRO

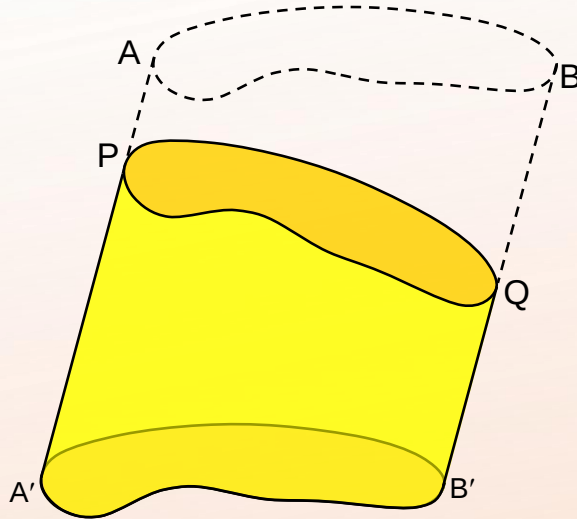
CICLO
PREUNIVERSITARIO
2023-2



TRONCO DE CILINDRO

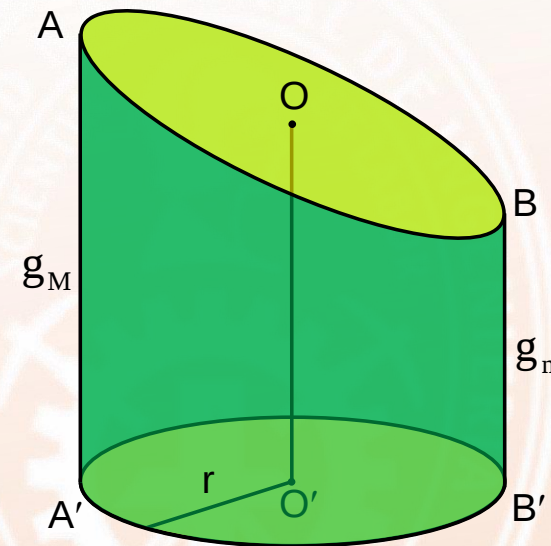
DEFINICIÓN

Es la unión de una parte de un cilindro comprendida entre una base y un plano no paralelo a dicha base, secante a todas las generatrices del cilindro y la sección determinada en el cilindro.



TRONCO DE CILINDRO CIRCULAR RECTO

Es el tronco de un cilindro circular recto.

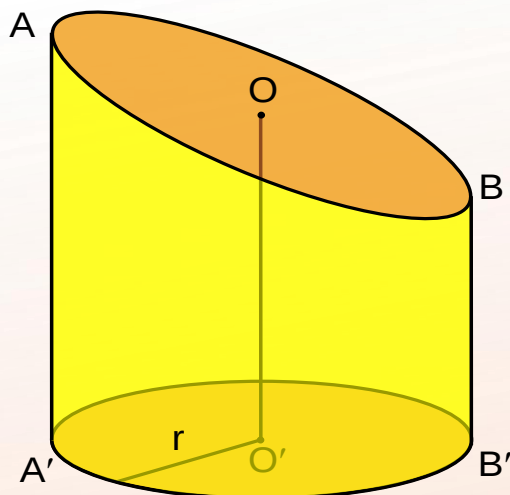


$\overline{OO'}$ es el eje del tronco

$$OO' = \frac{g_M + g_m}{2}$$

TEOREMA

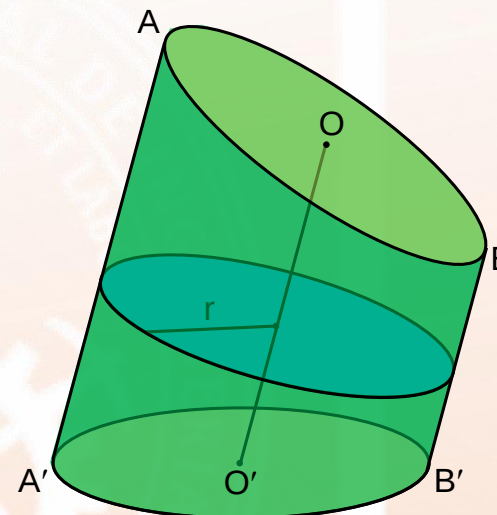
El área de la superficie lateral de un tronco de cilindro circular recto, es igual al producto de las longitudes de la circunferencia de la base y el eje del tronco.



$$S_L = (2\pi r)(OO')$$

TEOREMA

El área de la superficie lateral de un tronco de cilindro oblicuo de sección recta circular, es igual al producto de las longitudes de la circunferencia de la sección recta y el eje.



$$S_L = (2\pi r)(OO')$$

EJERCICIO 01

Un octaedro regular está inscrito en un cilindro circular recto. Si la longitud de la arista del octaedro es $2u$, entonces el área total (en u^2) del cilindro es

A) 8π

B) 10π

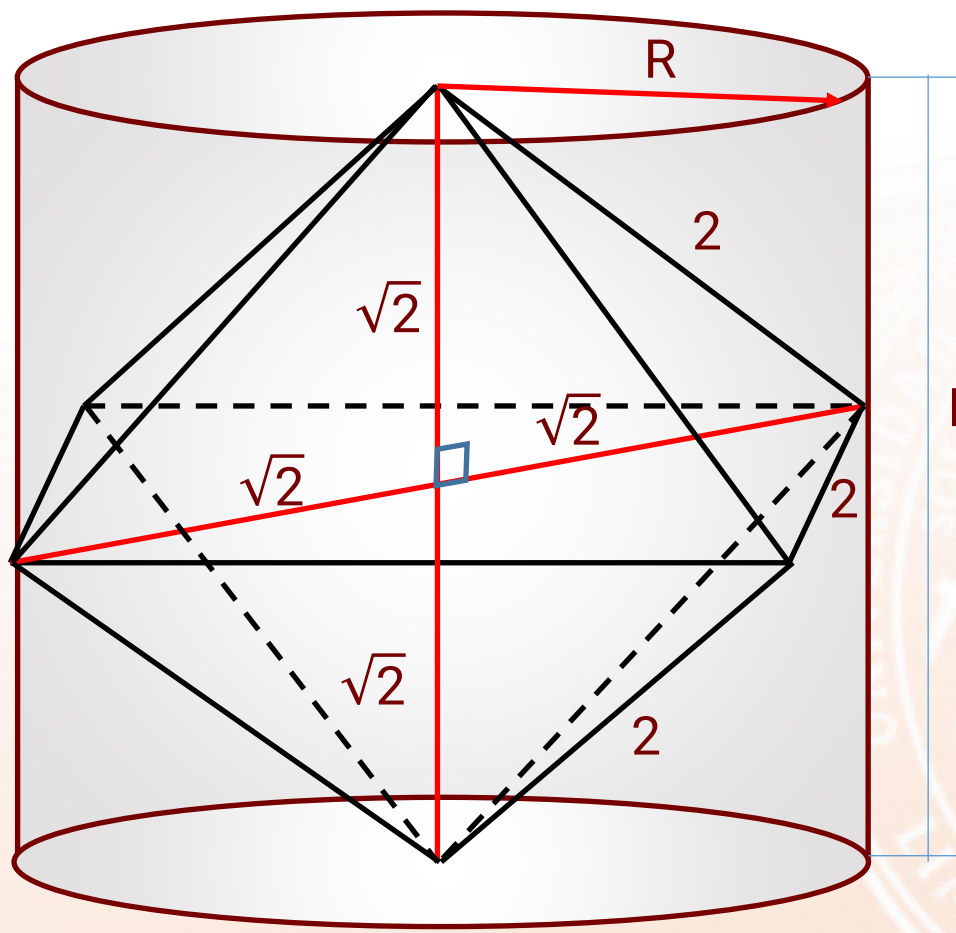
C) 12π

D) 14π

E) 16π

RESOLUCIÓN 01

Un octaedro regular está inscrito en un cilindro circular recto. Si la longitud de la arista del octaedro es 2 u, entonces el área total (en u^2) del cilindro es



Calcule $S = 2\pi R(R+H)$

$$2R = 2\sqrt{2} \quad H = 2\sqrt{2}$$

$$S = 2\pi R(R + H)$$

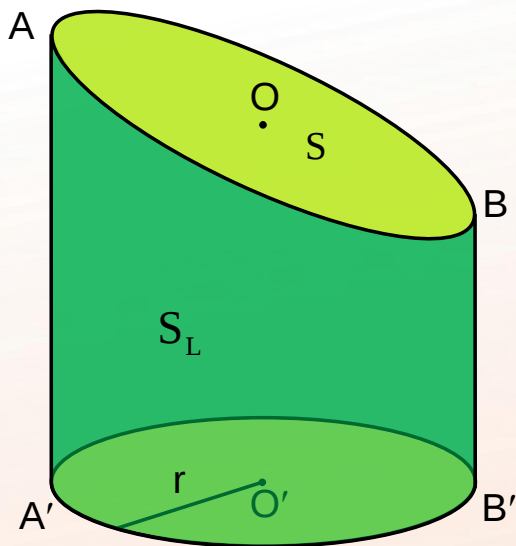
$$S = 2\pi(\sqrt{2})(\sqrt{2} + 2\sqrt{2})$$

$$S = 12\pi$$

Clave: C

TEOREMA

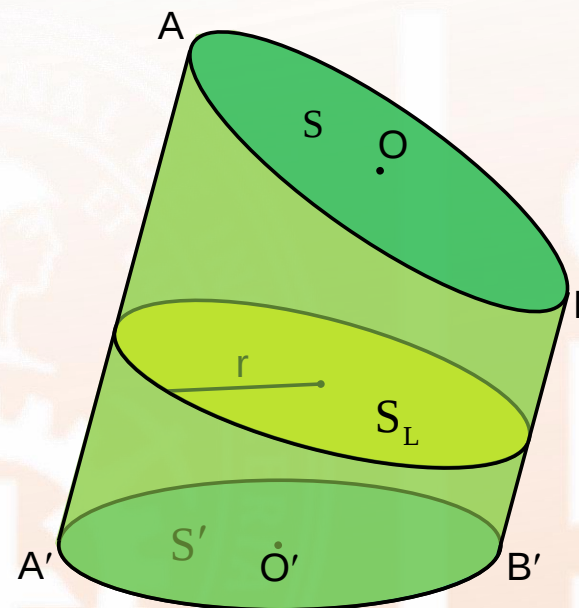
El área de la superficie total de un tronco de cilindro circular recto, es igual a la suma del área lateral y las áreas de las bases.



$$S_T = S_L + S + \pi r^2$$

TEOREMA

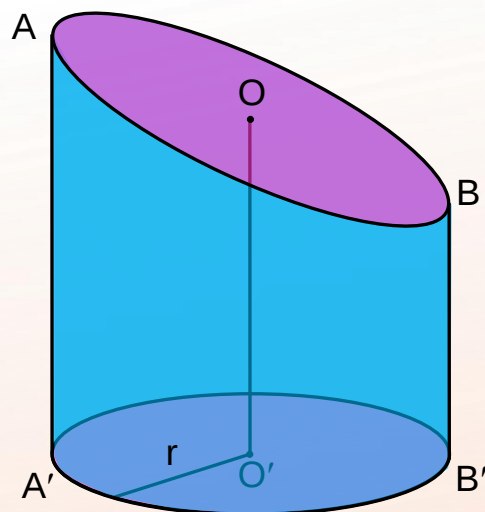
El área de la superficie total de un tronco de cilindro oblicuo de sección recta circular, es igual a la suma del área lateral y las áreas de las bases.



$$S_T = S_L + S + S'$$

TEOREMA

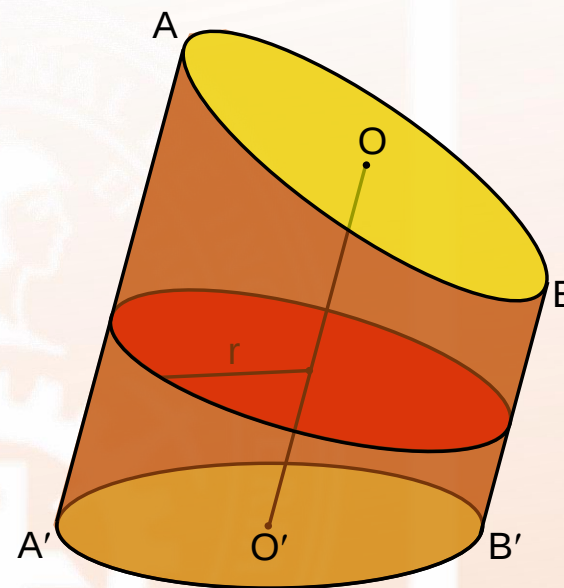
El volumen del sólido determinado por un tronco de cilindro circular recto, es igual al producto del área de la base y la longitud del eje.



$$V = (\pi r^2)(OO')$$

TEOREMA

El volumen del sólido determinado por un tronco de cilindro oblicuo, es igual al producto del área de la sección recta y la longitud del eje.



$$V = (\pi r^2)(OO')$$

EJERCICIO 02

En un tronco de cilindro circular recto, los planos que contienen a las bases determinan un diedro que mide 30° . Si las longitudes del radio de la base es 3 u y de la generatriz menor es $4\sqrt{3} \text{ u}$, entonces el volumen (en u^3) del sólido limitado por el tronco es

A) $32\sqrt{3}\pi$

B) $36\sqrt{3}\pi$

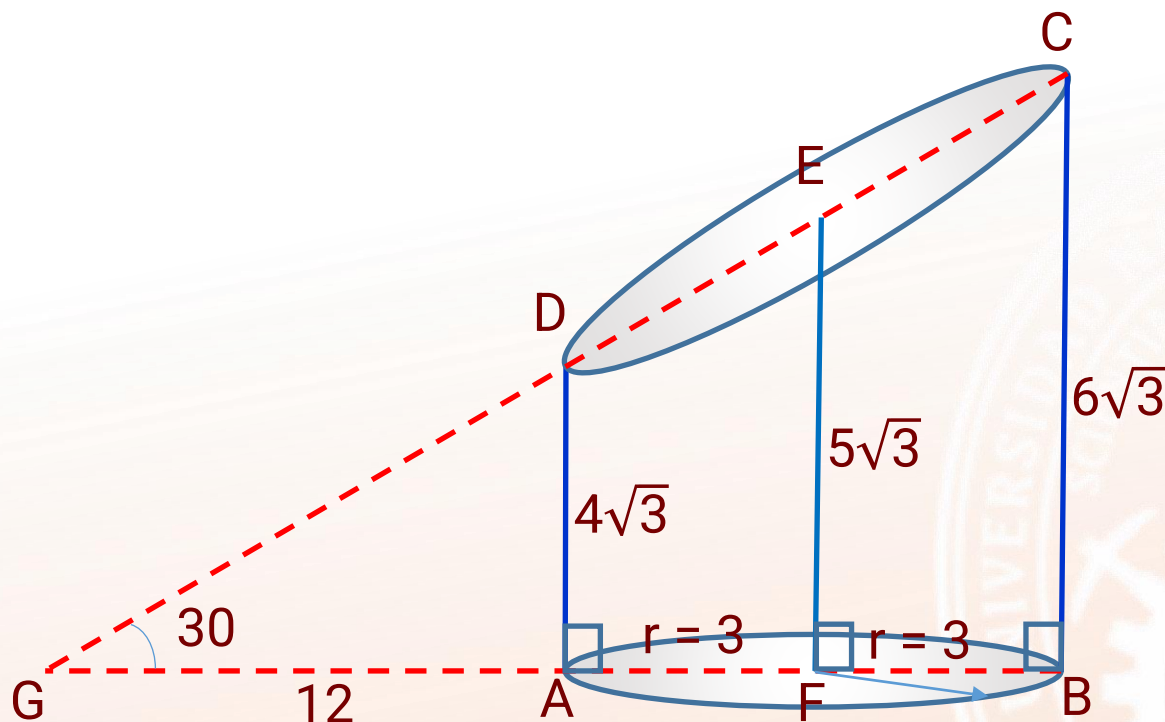
C) $40\sqrt{3}\pi$

D) $42\sqrt{3}\pi$

E) $45\sqrt{3}\pi$

RESOLUCIÓN 02

En un tronco de cilindro circular recto, los planos que contienen a las bases determinan un diedro que mide 30. Si las longitudes del radio de la base es 3 u y de la generatriz menor es $4\sqrt{3}$ u, entonces el volumen (en u^3) del sólido limitado por el tronco es



$$\text{Calcule } V = \pi r^2(h)$$

$$\triangle GAD \text{ (Notable } 30, 60) \rightarrow AG = 12$$

$$\triangle GFE \text{ (Notable } 30, 60) \rightarrow EF = 5\sqrt{3}$$

$$\text{Teorema: } V = \pi r^2(EF)$$

$$V = \pi(3)^2(5\sqrt{3})$$

$$V = 45\sqrt{3} \pi$$

Clave: E

EJERCICIO 03

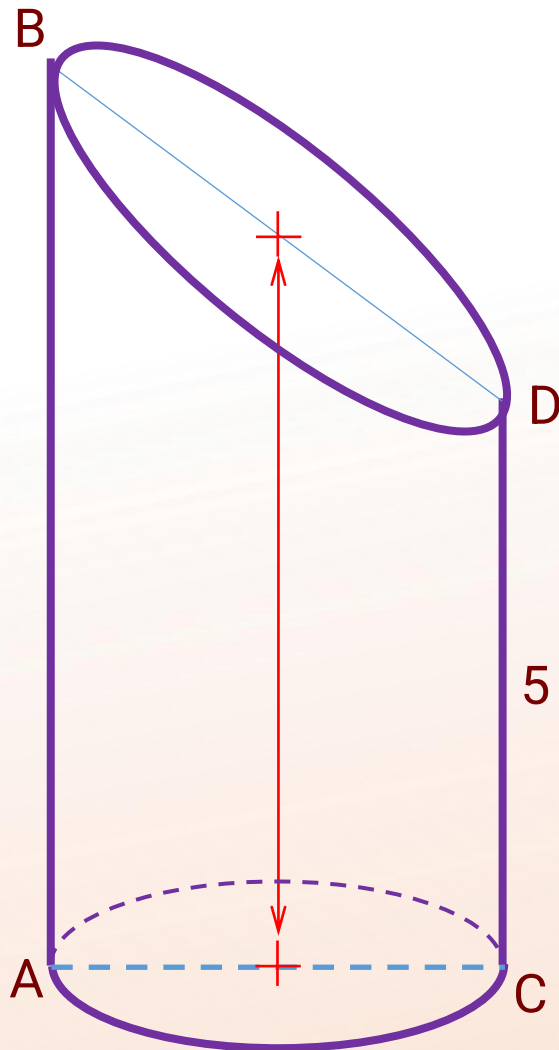
En un tronco de cilindro circular recto, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son generatrices diametralmente opuestas, tal que $\overline{AC}$ es diámetro de la base circular. Si $BD = CD = 5$ cm y la medida del ángulo ABD es 53° , entonces el volumen aproximado (en cm^3) del sólido limitado por el tronco de cilindro es

A) 20π
D) 26π

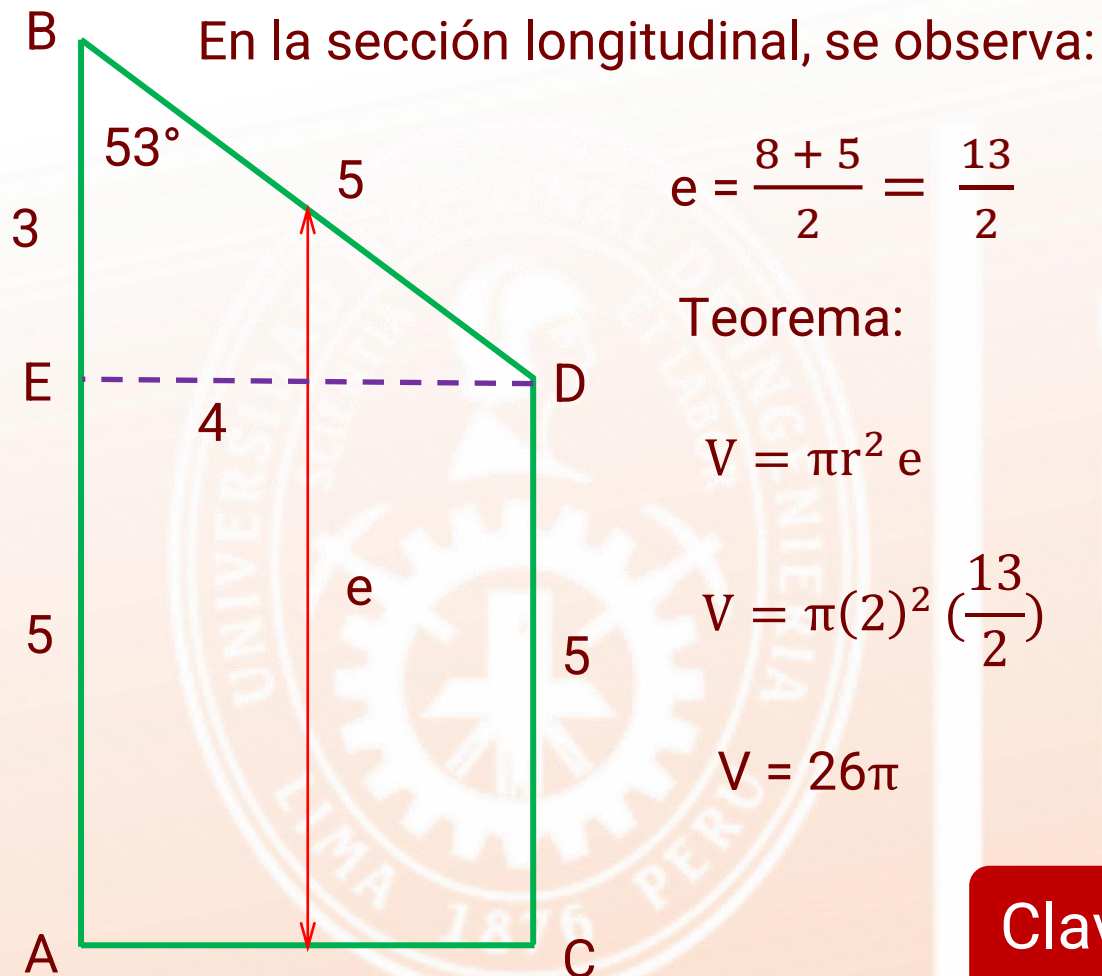
B) 22π
E) 28π

C) 24π

RESOLUCIÓN 03



En un tronco de cilindro circular recto, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son generatrices diametralmente opuestas, tal que $\overline{AC}$ es diámetro de la base circular. Si $BD = CD = 5$ cm y la medida del ángulo ABD es 53° , entonces el volumen aproximado (en cm^3) del sólido limitado por el tronco de cilindro es



Clave: D

EJERCICIO 04

Un cilindro de revolución está inscrito en un hexaedro regular ABCD-EFGH, M y N son los puntos medios de HD y CG respectivamente. Si $AB = 4u$, entonces el volumen (en u^3) del tronco de cilindro comprendido entre las regiones ABNM y EFGH es

A) 4π

D) 12π

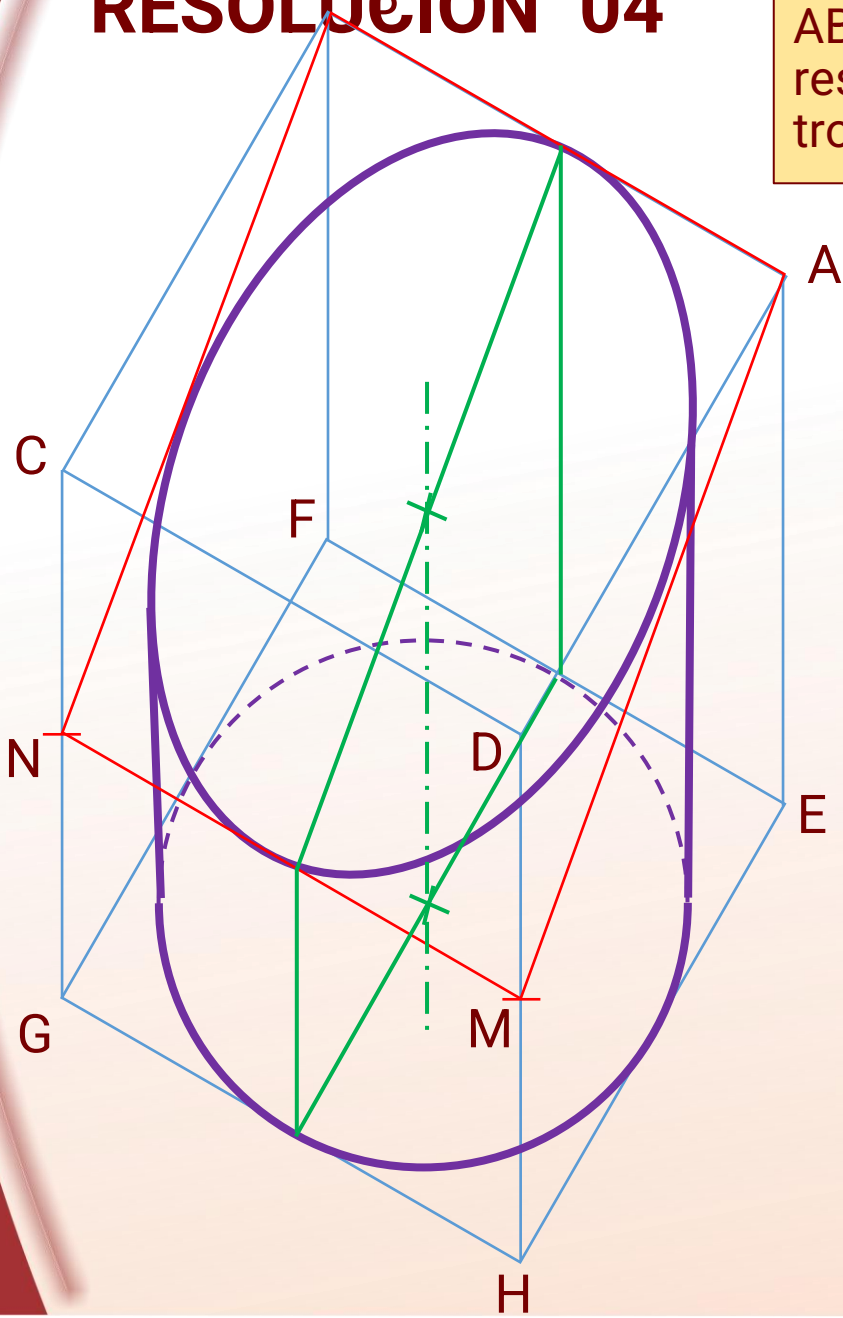
B) 6π

E) 16π

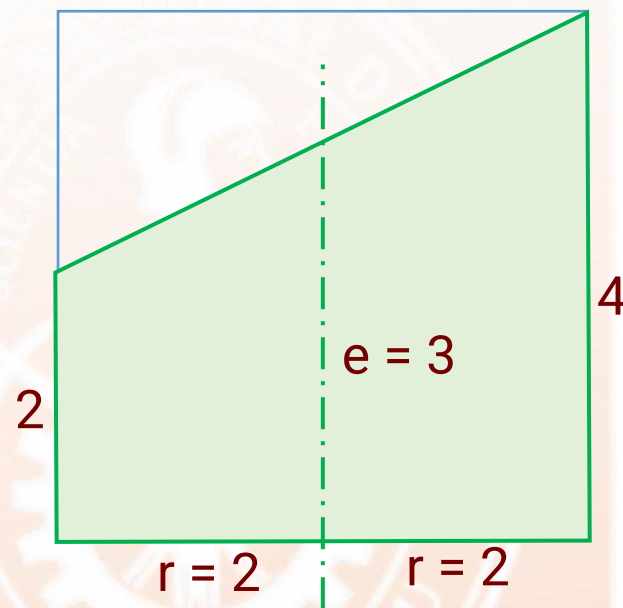
C) 8π

RESOLUCIÓN 04

Un cilindro de revolución está inscrito en un hexaedro regular ABCD-EFGH, M y N son los puntos medios de HD y CG respectivamente. Si $AB = 4$ u, entonces el volumen (en u^3) del tronco de cilindro comprendido entre las regiones ABNM y EFGH es



En la sección longitudinal



Teorema:

$$V = \pi r^2 e$$

$$V = \pi(2)^2 (3)$$

$$V = 12\pi$$

Clave: D

EJERCICIO 05

En un tronco de cilindro oblicuo, los ejes de las elipses son perpendiculares, las longitudes de las generatrices son a y b ($a < b$) y el ángulo que determinan el eje del tronco con el eje de la elipse mide 75° . Calcule el volumen del sólido limitado por el tronco de cilindro

A) $\frac{\pi}{64} (b - a)^2 (a - b)$

B) $\frac{\pi}{128} (b - a)^2 (a + b)$

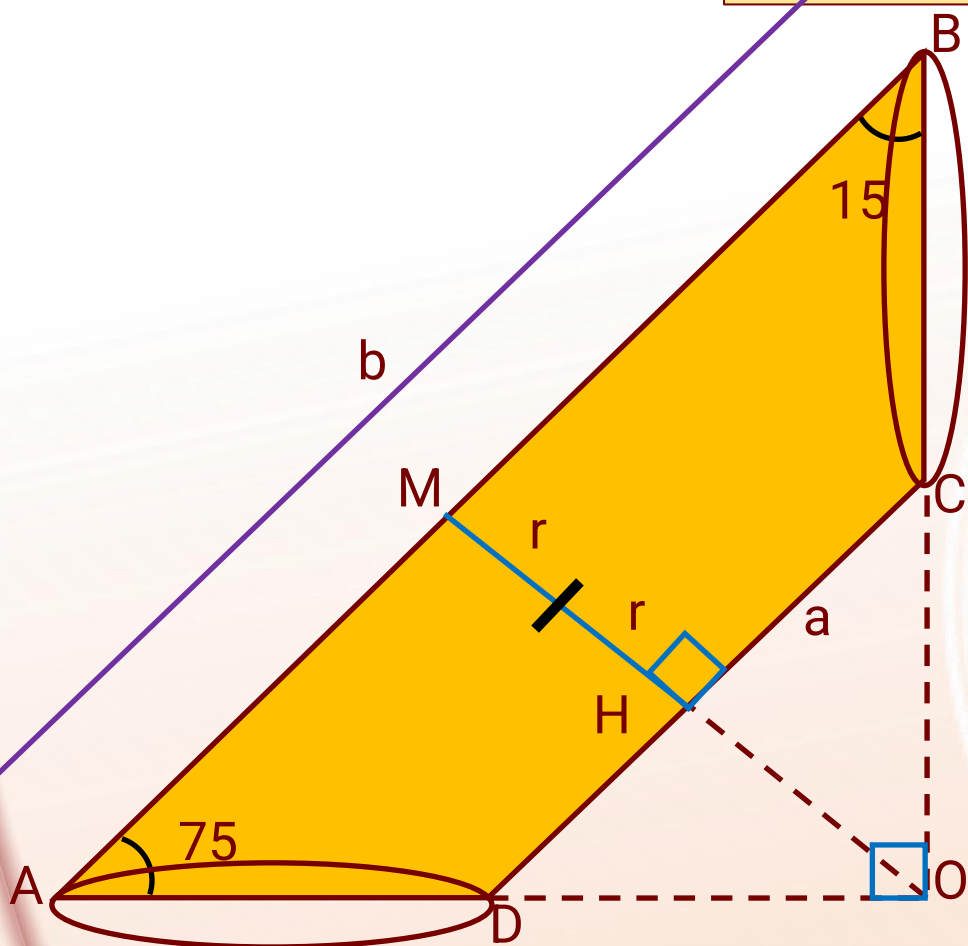
C) $\frac{\pi}{8} (b - a)^2 (a + b)$

D) $\frac{\pi}{16} (b - a)^2 (a + b)$

E) $\frac{\pi}{4} (b - a)^2 (a + b)$

RESOLUCIÓN 05

En un tronco de cilindro oblicuo, los ejes de las elipses son perpendiculares, las longitudes de las generatrices son a y b ($a < b$) y el ángulo que determinan el eje del tronco con el eje de la elipse mide 75 . Calcule el volumen del sólido limitado por el tronco de cilindro



En los triángulos rectángulos AOB y COD:

$$OH = \frac{a}{4} \quad y \quad OM = \frac{b}{4}$$

$$2r = \frac{a}{4} - \frac{b}{4} \rightarrow r = \frac{a - b}{8}$$

Teorema: $V = \pi r^2 \cdot EJE = \frac{\pi}{64} (b - a)^2 \left(\frac{a + b}{2} \right)$

$$V = \frac{\pi}{128} (b - a)^2 (a + b)$$

Clave: B

EJERCICIO 06

En un cilindro circular recto, se trazan dos planos secantes que contienen a los extremos de una generatriz y la intersección de dichos planos con la generatriz diametralmente opuesta es un único punto. Si el área lateral del cilindro es S , entonces el área de la superficie comprendida entre los planos es

A) $\frac{S}{4}$

D) $\frac{3S}{4}$

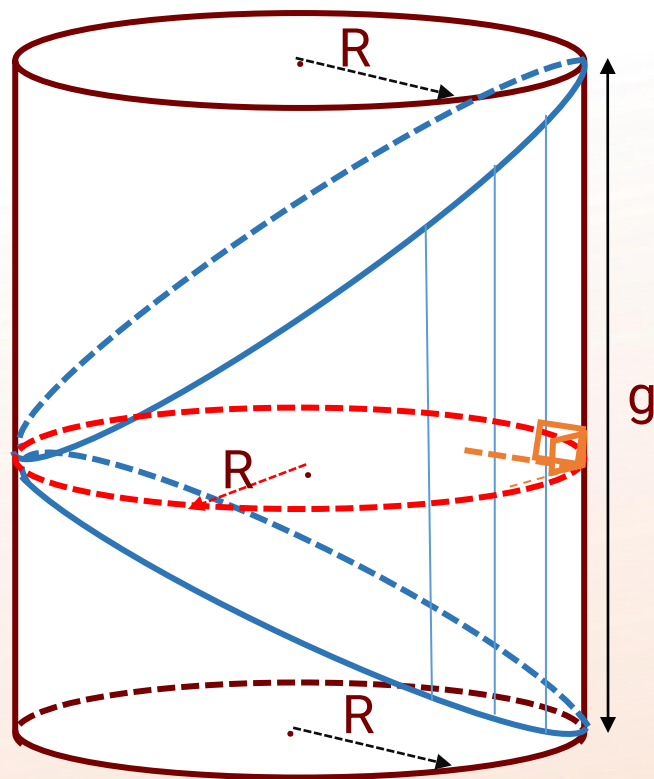
B) $\frac{S}{3}$

E) $\frac{2S}{3}$

C) $\frac{S}{2}$

RESOLUCIÓN 06

En un cilindro circular recto, se trazan dos planos secantes que contienen a los extremos de una generatriz y la intersección de dichos planos con la generatriz diametralmente opuesta es un único punto. Si el área lateral del cilindro es S , entonces el área de la superficie comprendida entre los planos es



- Dato: $A_{SL} = S = 2\pi Rg$
- Calcule: A_{SL} del tronco de cilindro de sección recta circular.

$$A_{SL} \text{ de T.C.} = (2p_{S.R.})\left(\frac{G+g}{2}\right)$$

$$A_{SL} \text{ de T.C.} = (2\pi R)\left(\frac{0+g}{2}\right)$$

$$A_{SL} \text{ de T.C.} = (\pi R)g$$

$$A_{SL} \text{ de T.C.} = \frac{S}{2}$$

Clave: C

EJERCICIO 07

En un tronco de cilindro circular recto, se trazan dos planos secantes que solo contienen a los extremos de las generatrices mayor y menor determinándose dos troncos de cilindros circular recto. Si los volúmenes de los sólidos determinados por estos dos troncos de cilindro son V_1 y V_2 , respectivamente, entonces el volumen del sólido determinado por el tronco de cilindro dado es

A) $\frac{V_1 + V_2}{2}$

B) $V_1 + V_2$

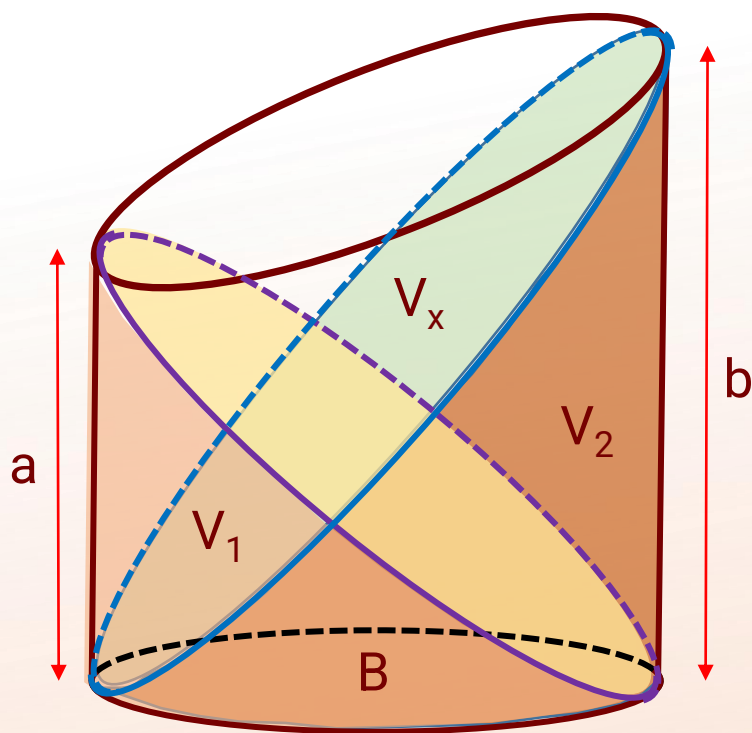
C) $\sqrt{(V_1)(V_2)}$

D) $\sqrt{(V_1)^2 + (V_2)^2}$

E) $\frac{(V_1)(V_2)}{V_1 + V_2}$

RESOLUCIÓN 07

En un tronco de cilindro circular recto, se trazan dos planos secantes que solo contienen a los extremos de las generatrices mayor y menor determinándose dos troncos de cilindros circular recto. Si los volúmenes de los sólidos determinados por estos dos troncos de cilindro son V_1 y V_2 , respectivamente, entonces el volumen del sólido determinado por el tronco de cilindro dado es



Teorema: $V_x = B\left(\frac{a+b}{2}\right)$

- Datos: $V_1 = B\left(\frac{a}{2}\right) \dots (1)$

$$V_2 = B\left(\frac{b}{2}\right) \dots (2)$$

- (1) + (2):

$$V_1 + V_2 = B\left(\frac{a}{2}\right) + B\left(\frac{b}{2}\right) = B\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$V_x = V_1 + V_2$$

Clave: B

EJERCICIO 08

Tres troncos de cilindro oblicuo tienen por secciones rectas a círculos congruentes y comparten una misma base, dos a dos, tal que los centros de dichas bases son los vértices de un triángulo rectángulo. Si los volúmenes de los sólidos determinados por los dos menores troncos son V_1 y V_2 , respectivamente, entonces el volumen del sólido determinado por el tercer tronco de cilindro, es

A) $\frac{V_1 + V_2}{4}$

B) $V_1 + V_2$

C) $2\sqrt{(V_1)(V_2)}$

D) $\sqrt{(V_1)^2 + (V_2)^2}$

E) $\frac{2(V_1)(V_2)}{V_1 + V_2}$

RESOLUCIÓN 08

Tres troncos de cilindro oblicuo tienen por secciones rectas a círculos congruentes y comparten una misma base, dos a dos, tal que los centros de dichas bases son los vértices de un triángulo rectángulo. Si los volúmenes de los sólidos determinados por los dos menores troncos son V_1 y V_2 , respectivamente, entonces el volumen del sólido determinado por el tercer tronco de cilindro, es

Teorema: Volumen del tronco de cilindro oblicuo

$$S = \frac{V_1}{c} = \frac{V_2}{a} = \frac{V_x}{b}$$

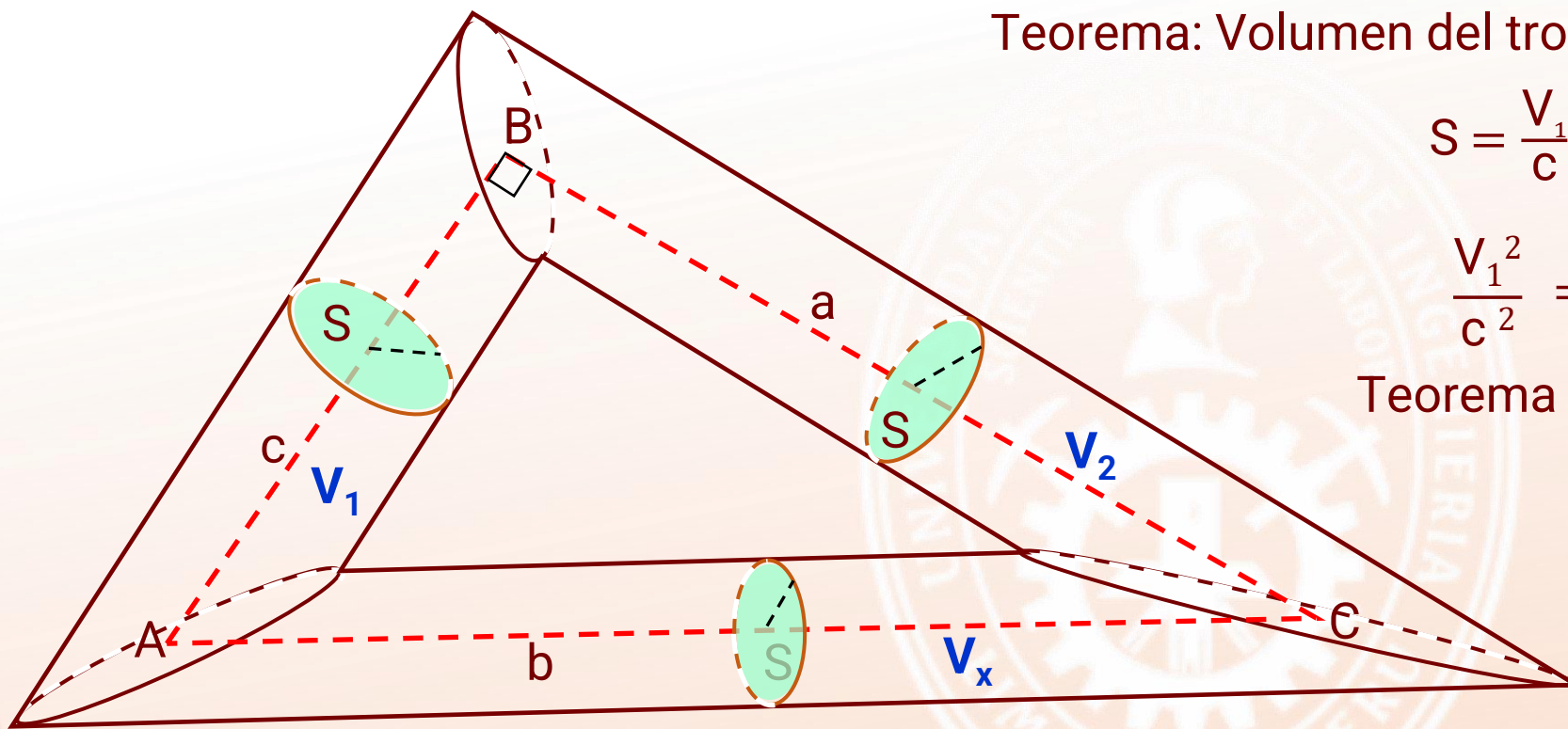
$$\frac{V_1^2}{c^2} = \frac{V_2^2}{a^2} = \frac{V_x^2}{b^2}$$

Teorema de Pitágoras

$$\frac{V_1^2}{c^2} + \frac{V_2^2}{a^2} = \frac{V_x^2}{b^2}$$

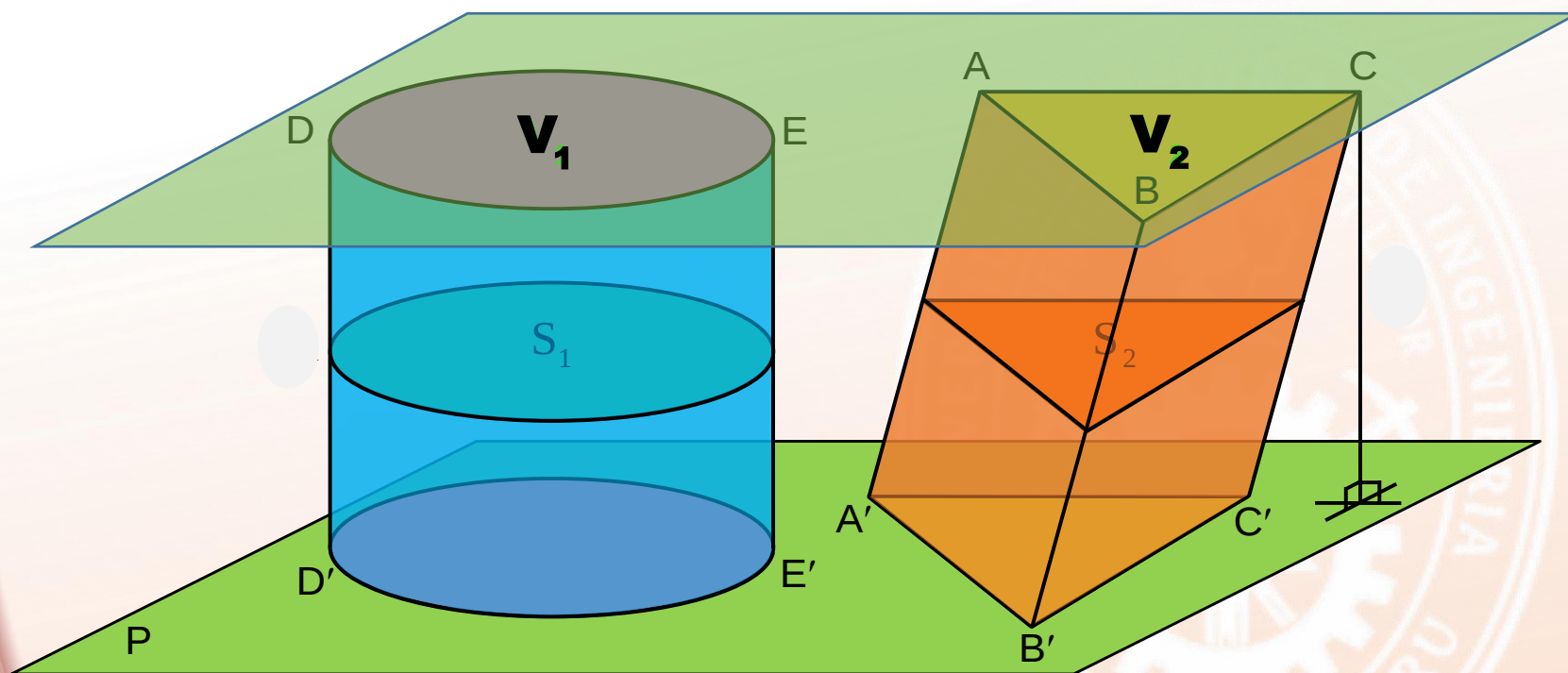
$$V_x = \sqrt{(V_1)^2 + (V_2)^2}$$

Clave: D



POSTULADO DE CAVALIERI

Si dos sólidos tienen sus bases comprendidas entre dos planos paralelos y las secciones determinadas en los sólidos, por cualquier plano paralelo a los planos de las bases, tienen áreas iguales, entonces los dos sólidos tienen el mismo volumen.

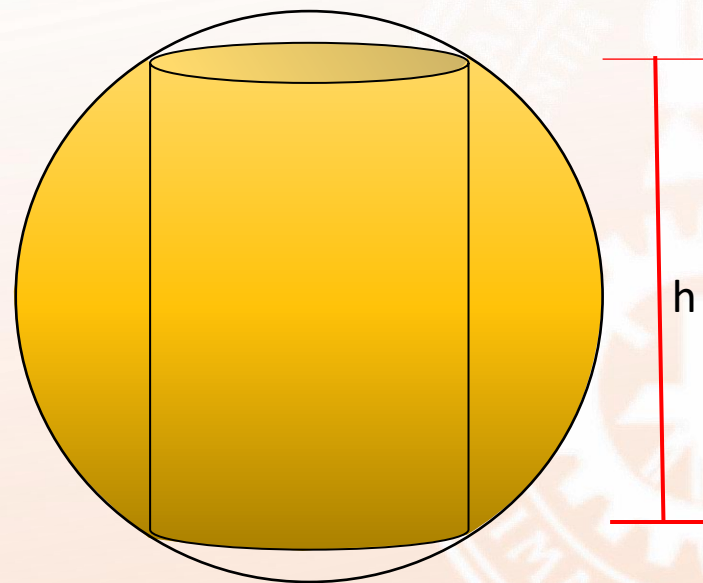


Si, para todo plano paralelo a los planos de las bases $S_1 = S_2$, entonces

$$V_1 = V_2$$

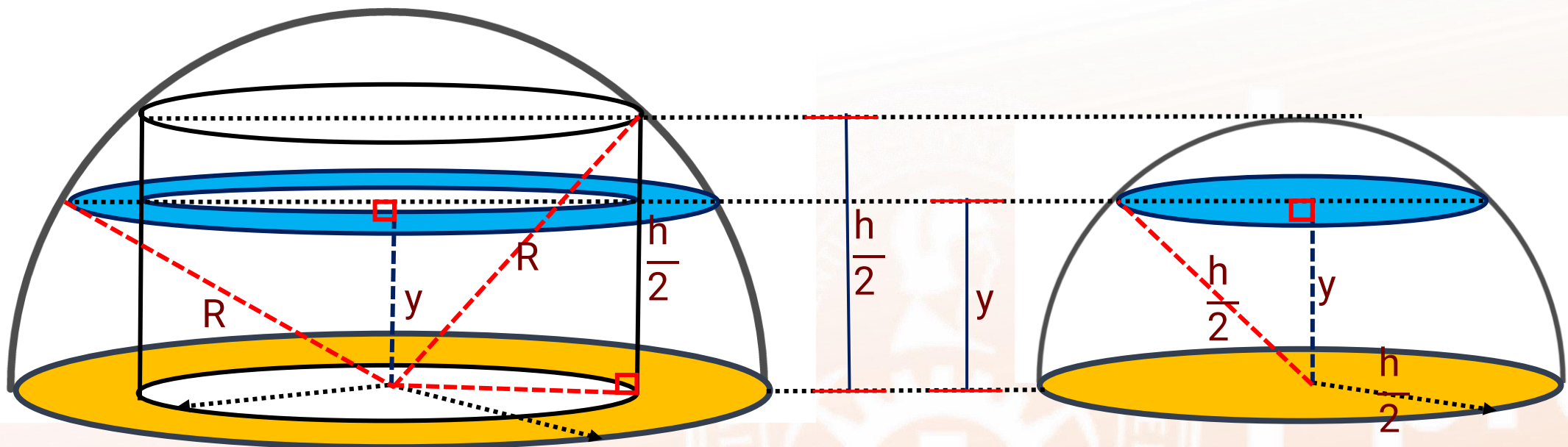
EJERCICIO 09

En la figura se muestra un servilletero que resulta de perforar un agujero cilíndrico a través del centro de una esfera. Utilice el *Postulado de Cavalieri* para demostrar que el volumen del sólido es igual a $\frac{\pi h^3}{6}$. ¿Qué sucede si comparamos con otro servilletero de altura congruente y diferente diámetro? ¿Son equivalentes?



DEMOSTRACIÓN 09

En la figura se muestra un servilletero que resulta de perforar un agujero cilíndrico a través del centro de una esfera. Utilice el *Postulado de Cavalieri* para demostrar que el volumen del sólido es igual a $\frac{\pi h^3}{6}$. ¿Qué sucede si comparamos con otro servilletero de altura congruente y diferente diámetro? ¿Son equivalentes?



Trabajaremos con la mitad del servilletero.

Las bases de los sólidos tienen la misma área el cual es $\frac{h^2}{4}$ y la misma altura la cual es $\frac{h}{2}$.

Las secciones paralelas a las bases determinadas en ambos sólidos son equivalentes a $\pi(\frac{h^2}{4} - y^2)$

Postulado de Cavalieri $(V_{\text{servilletero}})/2 = V_{\text{semiesfera}}$ $V_{\text{servilletero}} = 2(\frac{2\pi}{3}(\frac{h}{2})^3) = \frac{\pi h^3}{6}$